I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Высшая лига. Математический бой № 2

2 марта

1. Найдите все тройки натуральных чисел (k, m, n), где k — однозначно, m — двузначно, n — трехзначно, и при этом на числовой прямой число $1/k$ лежит строго посередине между числами $2/m$ и $3/n$.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На стороне AB взята такая точка D, что $\angle BDC = 80^\circ$. Докажите, что $AD = BC$.

3. Многоугольник называется *несимметричным*, если у него нет ни оси симметрии, ни центра симметрии. Нарисуйте 5 различных несимметричных многоугольников так, чтобы из любых трёх можно было сложить симметричный многоугольник.

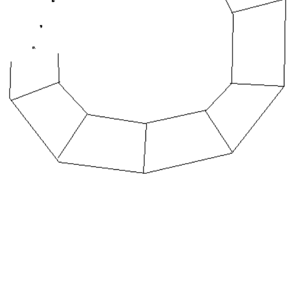
4. Числа $1, 2, 3, \ldots, 101$ записывают в строку в некотором порядке. Назовем порядок *хорошим*, если можно вычеркнуть одно число так, что остальные числа будут идти строго по возрастанию. Сколько существует разных хороших порядков?

5. На свободные поля доски 9×10 по одному выставляются короли. Выставленный король должен побить четное число пустых полей (в частности, ни одного). Какое наибольшее число королей можно выставить с соблюдением такого правила?

6. На доске написаны натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Каждую минуту мальчик Лёша выбирает два числа a и b, написанных на доске, вычисляет НОД$(a^2 + b^2 + 2, a^2b^2 + 3)$, пишет его на доску, а сами числа стирает. Через 99 минут на доске останется одно число. Докажите, что оно не может быть точным квадратом.

7. На двух чашах весов лежат по 40 гирек, одинаковых с виду, весы находятся в равновесии. Известно, что на каждой чаше не все гири весят одинаково. За одну операцию разрешается любые две гири поменять местами. За какое наименьшее число операций можно наверняка нарушить равновесие чаш?

8. Из 60 четырехугольников составили кольцо (см. рис.). В вершинах четырёхугольников записали по целому числу, а на каждой стороне записали сумму чисел в её концах. Могло ли случиться так, что в вершинах и на сторонах в итоге были записаны в точности по разу 300 последовательных чисел?



I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Первая лига. Математический бой № 2

2 марта

1. Найдите все тройки натуральных чисел (k, m, n), где k — однозначно, m — двузначно, n — трехзначно, и при этом на числовой прямой число $1/k$ лежит строго посередине между числами $2/m$ и $3/n$.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$. На стороне AB взята такая точка D, что $\angle BDC = 80°$. Докажите, что $AD = BC$.

3. Клетчатая фигура называется *несимметричной*, если у нее нет ни оси симметрии, ни центра симметрии. Нарисуйте такие 4 различные несимметричные клетчатые фигуры, чтобы из любых трёх можно было сложить симметричную фигуру.

4. Числа 1, 2, 3, . . ., 101 записывают в строку в некотором порядке. Назовем порядок *хорошим*, если можно вычеркнуть одно число так, что остальные числа будут идти строго по возрастанию. Сколько существует разных хороших порядков?

5. На свободные клетки полоски 1×88 по одной выставляются фишки. Рядом с очередной выставленной фишкой должно быть чётное число пустых клеток (в частности, может быть 0 пустых клеток). Какое наибольшее число фишек можно выставить по такому правилу?

6. Назовём натуральное число *удачным*, если оно является произведением неповторяющихся простых чисел. Существует ли такое трехзначное число N, что все числа $N + 1$, $2N + 1$, . . . , $999N + 1$ удачны?

7. На двух чашах весов лежат по 40 гирек, одинаковых с виду, весы находятся в равновесии. Известно, что на каждой чаше не все гири весят одинаково. За одну операцию разрешается любые две гири поменять местами. За какое наименьшее число операций можно наверняка нарушить равновесие чаш?

8. Из 60 четырехугольников составили кольцо (см. рис.). В вершинах четырёхугольников записали по целому числу, а на каждой стороне записали сумму чисел в её концах. Могло ли случиться так, что в вершинах и на сторонах в итоге были записаны в точности по разу числа 1, 2, 3, . . . , 300?