*II European math tournament*
*Minsk, March 1–7, 2019*

# Командная олимпиада. Юниоры

*2 марта*

**1.** Даны натуральные числа $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, большие 1. Известно, что $\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{f}=6$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $c$ — составное.

**2.** В каждую клетку таблицы $3\times 3$ записано число. При этом сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 3 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 3 раза больше, чем в предыдущем. Найдите сумму чисел в первой строке, если известно, что она равна сумме чисел во втором столбце.

**3.** На столе лежали фигуры двух видов: квадраты $2\times 2$ и прямоугольники $1\times 5$, причем сумма периметров квадратов равнялась сумме периметров прямоугольников. Могло ли случиться, что из них всех можно сложить один большой квадрат (без дыр)?

**4.** На острове живут только рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). На площади собрались 111 островитян и по очереди сказали "Здесь лжецов как минимум на 1 больше, чем рыцарей", "Здесь лжецов как минимум на 2 больше, чем рыцарей", …, "Здесь лжецов как минимум на 111 больше, чем рыцарей". Сколько лжецов могло быть на площади? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

**5.** Вершины треугольника $ABC$ лежат на сторонах квадрата $7\times 7$, причем $A$, $B$ и $C$ являются узлами сетки, то есть лежат в вершинах клеток. На какое наибольшее число частей могут разбить этот квадрат стороны треугольника и линии сетки?

**6.** Есть три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо сложить две кучки в одну и разделить её на четыре кучки. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

**7.** Вадим выбрал натуральное число $k$ и посчитал числа $2^k$ и $5^k$. Оказалось, что их десятичные записи начинаются на одну и ту же цифру. Чему может быть равна эта цифра? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

**8.** На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется *хорошим*, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

## Team contest. Junior league

*March, 2*

**1.** Given six integers $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, each one is greater than 1. It is known that $\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{f} = 6$. Prove that at least one of the numbers $a$, $b$, $c$ is a composite number.

**2.** Each cell of the table $3\times 3$ contains a number. It is known that the sum of numbers in each row, except the first, is equal to the sum of the numbers in the previous row, increased by 3; and the sum of numbers in each column, except the first, is equal to the sum of the numbers in the previous column, multiplied by 3. Find the sum of the numbers in the first row, if you know that it is equal to the sum of the numbers in the second column.

**3.** There are two types of figures on the table: squares $2\times 2$ and rectangles $1\times 5$, and the sum of the perimeters of the squares is equal to the sum of the perimeters of the rectangles. Is this possible that all the figures can be folded into one large square (without holes)?

**4.** Only knights and liars live on the island; knights always tell the truth, liars always lie. 111 islanders met in the square and in turn said “Here are at least 1 more liars than knights”, “Here are at least 2 more liars than knights”, ..., “Here are at least 111 more liars than knights”. How many liars could there be on the square? Find all the posibilities and prove that there are no others.

**5.** The vertices of a triangle $ABC$ lie on the sides of the square $7\times 7$, and $A$, $B$ and $C$ are grid nodes, that is, they lie at the vertices of the cells. What is the largest number of parts the square can be cut down by triangle sides and grid lines?

**6.** There are three piles of 40 stones. Peter and Vasya take turns, Peter begins. During the turn, the player must merge two piles into one, and then divide it into 4 piles. If a player cannot take a turn, he loses. Which of the players can always win, no matter how the opponent plays?

**7.** Vadim came up with a positive integer $k$ and calculated the numbers $2^k$ and $5^k$. It turned out that their decimal representations begin with the same digit. Which one?

**8.** There are 100 points on the plane, no three of which lie on the same line. One of these points is red and the rest are blue. A triangle with vertices at blue points is called *good* if the red point is inside it. Could it be that the number of good triangles is at least half of the total number of triangles with vertices in blue points?

## Командная олимпиада. Сеньоры

*2 марта*

**1.** Имеется несколько дробей (числители и знаменатели натуральны, знаменатели больше 1). Произведение всех дробей равно 7. Докажите, что хотя бы один из числителей — составное число.

**2.** В каждую клетку таблицы $4 \times 4$ записано положительное число. При этом сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 4 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 3 раза больше, чем в предыдущем. Найдите сумму чисел во втором столбце, если известно, что она равна сумме чисел в какой-то строке.

**3.** На столе лежали фигуры двух видов: квадраты $2 \times 2$ и прямоугольники $1 \times 6$, причем сумма периметров квадратов равнялась сумме периметров прямоугольников. Из всех фигур удалось сложить один большой квадрат (без дыр). Какое наименьшее число фигур могло быть на столе?

**4.** Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle B = \angle C$, $\angle D = 90^\circ$ и $AB = 2CD$. Докажите, что биссектриса $\angle ACB$ перпендикулярна $CD$.

**5.** Вадим выбрал натуральное число $k$ и посчитал числа $2^k$ и $5^k$. Оказалось, что их десятичные записи начинаются на одну и ту же цифру. Чему может быть равна эта цифра? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

**6.** В клетчатый квадрат $100 \times 100$ вписан треугольник так, что его вершины совпадают с вершинами клеток. На какое наибольшее число частей могут разбить этот квадрат стороны треугольника и линии сетки?

**7.** Сумма вещественных чисел $a$, $b$, $c$ и $d$ равна 0. Обозначим суммы $N = ab + cd$, $K = ac + bd$, $P = ad + bc$. Докажите, что хотя бы одна из сумм $N + 2K$, $K + 2P$ и $P + 2N$ не положительна.

**8.** На плоскости дано 100 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Одна из точек красная, остальные — синие. Какое может быть наибольшее количество треугольников с синими вершинами, содержащих красную точку?

*II Европейский математический турнир*
*г. Минск, 1–7 марта 2019 года*

# Team contest. Senior league

*March, 2*

**1.** There are several fractions (numerators and denominators are positive integers, denominators greater than 1). The product of all the fractions is equal to 7. Prove that at least one of the numerators is a composite number.

**2.** Each cell of the table $4 \times 4$ contains a positive number. It is known that the sum of numbers in each row, except the first, is equal to the sum of the numbers in the previous row, increased by 4; and the sum of numbers in each column, except the first, is equal to the sum of the numbers in the previous column, multiplied by 3. Find the sum of the numbers in the second column, if you know that it is equal to the sum of the numbers in one of the raws.

**3.** There are two types of figures on the table: squares $2 \times 2$ and rectangles $1 \times 6$, and the sum of the perimeters of the squares is equal to the sum of the perimeters of the rectangles. Of all the figures, one large square (without holes) was folded. What is the least possible total number of figures on the table?

**4.** There is a covex quadrilateral $ABCD$ on the plane such that $\angle B = \angle C$, $\angle D = 90^\circ$ and $AB = 2CD$. Prove that the angle bisector of $\angle ACB$ is perpendicular to the line $CD$.

**5.** Vadim came up with a positive integer $k$ and calculated the numbers $2^k$ and $5^k$. It turned out that their decimal representations begin with the same digit. Which one? Find all the posibilities and prove that there are no others.

**6.** There is a triangle in the checkered square $100 \times 100$ so that its vertices lie in the the vertices of the cells. What is the largest number of parts the square can be cut down by the sides of the triangle and the grid lines?

**7.** The sum of the real numbers $a$, $b$, $c$ and $d$ is 0. We denote the sums $N = ab + cd$, $K = ac + bd$, $P = ad + bc$. Prove that at least one of the sums $N + 2K$, $K + 2P$ and $P + 2N$ is not positive.

**8.** There are 100 points on the plane, no three of which lie on the same line. One of these points is red and the rest are blue. What is the largest possible number of triangles with blue verticies containing the red point?