II Европейский математический турнир
г. Минск, 1–7 марта 2019 года

Senior Grand league. Математический бой № 4. Бои за 1 и 3 места

6 марта

1. Вещественные числа x, y, z не равны 0 и $x+2y+4z=0$. Чему может быть равно выражение $\dfrac{x^2}{8yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{8z^2}{xy}$?

2. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным.

3. В выпуклом 1000-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Некоторые 500 диагоналей покрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Из каждой вершины выходит ровно одна красная диагональ; каждую синюю диагональ пересекает хотя бы одна красная. Найдите наименьшее возможное количество пересечений красных диагоналей.

4. Последовательность из 0 и 1 такова, что для всех $k>2018$ если $a_{k-2018}+\ldots+a_{k-1}>23$, то $a_k=0$, а если $a_{k-2018}+\ldots+a_{k-1}\leqslant 23$, то $a_k=1$. Докажите, что найдётся такое N, что при всех $n>N$ выполнено $a_{n+2019}=a_n$.

5. На каждой стороне треугольника отмечено по точке, а внутри треугольника — точка P. Точку P соединили с вершинами и отмеченными точками на сторонах. Могут ли все шесть образовавшихся треугольников быть равнобедренными?

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $1<a_1<a_2<\ldots<a_n<2a_1$. Пусть m — количество различных простых делителей произведения $a_1a_2\ldots a_n$. Докажите, что

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{m-1}\geqslant (n!)^m.$$

7. Докажите, что в любом слове, в котором различных букв не более 10 (например, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ), можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

8. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) угол при вершине A равен 80°. На сторонах BC и AC отмечены точки D и E соответственно так, что $\angle BAD=50^\circ$, $\angle ABE=30^\circ$. Докажите, что $\angle BED=40^\circ$.

Senior Grand league. Математический бой № 4. Бои за 5 и 7 места

6 марта

1. Вещественные исла x, y, z не равны 0 и $x+2y+4z=0$. Чему может быть равно выражение $\dfrac{x^2}{8yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{8z^2}{xy}$?

2. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным.

3. В выпуклом 1000-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Некоторые 500 диагоналей покрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Из каждой вершины выходит ровно одна красная диагональ; каждую синюю диагональ пересекает хотя бы одна красная. Найдите наименьшее возможное количество пересечений красных диагоналей.

4. Последовательность из 0 и 1 такова, что для всех $k>2018$ если $a_{k-2018}+\ldots+a_{k-1}>23$, то $a_k=0$, а если $a_{k-2018}+\ldots+a_{k-1}\leqslant 23$, то $a_k=1$. Докажите, что найдётся такое N, что при всех $n>N$ выполнено $a_{n+2019}=a_n$.

5. На каждой стороне треугольника отмечено по точке, а внутри треугольника — точка P. Точку P соединили с вершинами и отмеченными точками на сторонах. Могут ли все шесть образовавшихся треугольников быть равнобедренными?

6. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата $n\times n$ в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадратике 2×2 было ровно две синие и ровно две красные клетки?

7. Докажите, что в любом слове, в котором различных букв не более 10 (например, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ), можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

8. На отрезке AB отмечена точка C. По разные стороны от AB построены равносторонние треугольники ABX и ACY. Обозначим через K и M середины отрезков YC и BX соответственно. Оказалось, что треугольник AMK — прямоугольный. В каком отношении точка C делит отрезок AB?

Junior Grand league. Математический бой № 4. Бои за 1 и 3 места

6 марта

1. Дано натуральное число n. Какое наибольшее количество чисел из списка 1, 2, 3, ..., $n-1$, n можно выбрать с таким условием, чтобы наибольший общий делитель любых двух выбранных чисел был больше 1?

2. Маша написала числа от 1 до 100 на пятидесяти карточках, по одному числу с каждой стороны каждой карточки, и разложила эти карточки на столе. К столу подошёл Вася и видит перед собой 50 чисел на верхних сторонах карточек. Он может выбрать несколько выложенных карточек (возможно, 0 или все) и одновременно перевернуть их. Вася стремится, чтобы сумма чисел на верхних сторонах карточек стала как можно больше. Какую максимальную сумму он может гарантированно получить, вне зависимости от того, как Маша писала числа?

3. На столе лежит кучка из 55 камней. Петр и Васил ходят по очереди, начинает Петр. За ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие, и добавить ещё две кучки камней, равных одной из полученных (запас дополнительных камней неограничен). Петр выиграет, если после его хода во всех кучках будет по одному камню. Может ли Васил ему помешать?

4. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным.

5. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата $n \times n$ в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадратике 2×2 было ровно две синие и ровно две красные клетки?

6. Докажите, что в любом слове, в котором различных букв не более 10 (например, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ), можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

7. Трое детей хранят шоколад. Каждое утро весь шоколад взвешивается. Если шоколада у ребёнка оказывается не менее 65% от остальных (по весу), то он должен выложить половину своего шоколада на стол, и они все вместе его съедают. В другое время никто шоколад не ест. Могло ли случиться, что через несколько дней шоколада у всех стало меньше?

8. Алекс выписал все делители натурального числа N, кроме 1 и N. Он разделил самое большое из выписанных чисел на самое маленькое, получилось 961. Сколько различных значений может принимать N?

Junior Grand league. Математический бой № 4. Бои за 5 и 7 места

6 марта

1. Дано натуральное число n. Какое наибольшее количество чисел из списка 1, 2, 3, …, $n-1$, n можно выбрать с таким условием, чтобы наибольший общий делитель любых двух выбранных чисел был больше 1?

2. На доске написаны в ряд десять натуральных чисел. Известно, что каждое число больше предыдущего и делится на одно из предыдущих, первое число больше 1, а сумма всех чисел равна 275. Какие числа написаны на доске?

3. На столе лежит кучка из 55 камней. Петр и Васил ходят по очереди, начинает Петр. За ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие, и добавить ещё две кучки камней, равных одной из полученных (запас дополнительных камней неограничен). Петр выиграет, если после его хода во всех кучках будет по одному камню. Может ли Васил ему помешать?

4. Таблица 4×4 заполнена числами. Петя переставил её столбцы так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице Вася переставил строки так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Каково наибольшее возможное количество различных чисел в ней?

5. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата $n \times n$ в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадратике 2×2 было ровно две синие и ровно две красные клетки?

6. Докажите, что в любом слове, в котором различных букв не более 10 (например, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ), можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

7. Трое детей хранят шоколад. Каждое утро весь шоколад взвешивается. Если шоколада у ребёнка оказывается не менее 65% от остальных (по весу), то он должен выложить половину своего шоколада на стол, и они все вместе его съедают. В другое время никто шоколад не ест. Могло ли случиться, что через несколько дней шоколада у всех стало меньше?

8. Алекс выписал все делители натурального числа N, кроме 1 и N. Он разделил самое большое из выписанных чисел на самое маленькое, получилось 961. Сколько различных значений может принимать N?

The International league. Матбой № 4. Sofia vs MMMF1329 (2)

6 марта

1. Даны треугольники, у которых все углы целые (в градусах), и для каждого возможного набора углов есть ровно один треугольник. Назовем *хорошим* треугольник, который можно разбить биссектрисой на два меньших, из которых хотя бы один — равнобедренный. Сколько хороших треугольников?

2. Трое детей хранят шоколад. Каждое утро весь шоколад взвешивается. Если шоколада у ребёнка оказывается не менее 70% от остальных (по весу), то он должен выложить половину своего шоколада на стол, и они все вместе его съедают. В другое время никто шоколад не ест. Могло ли случиться, что через несколько дней шоколада у всех стало меньше?

3. За круглым столом сидит 70 детей. Может ли ровно половина из них сидеть между мальчиком и девочкой?

4. Клетчатый квадрат 10×10 разрезали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение периметра.

5. На столе лежит кучка из 55 камней. Петр и Васил ходят по очереди, начинает Петр. За ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие, и добавить ещё две кучки камней, равных одной из полученных (запас дополнительных камней неограничен). Петр выиграет, если после его хода во всех кучках будет по одному камню. Может ли Васил ему помешать?

6. В таблицу 3×3 вписаны цифры от 0 до 9 без повторов. Сумма в верхней строке вчетверо больше чем в нижней, а в правом столбце — вчетверо больше, чем в левом. Докажите, что сумма в средней строке равна сумме в среднем столбце.

7. Алекс выписал все делители натурального числа N, кроме 1 и N. Он разделил самое большое из выписанных чисел на самое маленькое, получилось 25. Найдите все возможные значения N.

8. В кружке 24 человека. У Алисы 8 друзей среди кружковцев, а у каждого из остальных не менее, чем по 11. Если кто-то в этом кружке узнает новость, он сообщает ее всем своим друзьям. Алиса узнала новость. Докажите, что через некоторое время ее будет знать весь кружок.

The International league. Матбой № 4. Moscow-2Sch(2) vs Tajikistan (s)

6 марта

1. Даны треугольники, у которых все углы целые (в градусах), и для каждого возможного набора углов есть ровно один треугольник. Назовем *хорошим* треугольник, который можно разбить биссектрисой на два меньших, из которых хотя бы один — равнобедренный. Сколько хороших треугольников?

2. Расставьте скобки в левой части равенства $1 : 2 : 3 : 4 : 6 = 1$ так, чтобы оно стало верным. (Порядок чисел менять нельзя.)

3. За круглым столом сидит 20 детей. Может ли ровно половина из них сидеть между мальчиком и девочкой?

4. Разрежьте квадрат 5×5 по границам клеток на 3 части так, чтобы их периметры были одинаковы, а площади отличались не более чем на одну клетку.

5. На столе лежит кучка из 55 камней. Петр и Васил ходят по очереди, начинает Петр. За ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие, и добавить ещё две кучки камней, равных одной из полученных (запас дополнительных камней неограничен). Петр выиграет, если после его хода во всех кучках будет по одному камню. Может ли Васил ему помешать?

6. В таблицу 3×3 вписаны цифры от 1 до 9 без повторов. Сумма в верхней строке вчетверо больше чем в нижней, а в правом столбце — в полтора раза больше, чем в левом. Какая цифра может стоять в центре таблицы?

7. Алекс выписал все делители натурального числа N, кроме 1 и N. Он разделил самое большое из выписанных чисел на самое маленькое, получилось 25. Найдите все возможные значения N.

8. В кружке 24 человека. У Алисы 8 друзей среди кружковцев, а у каждого из остальных не менее чем по 11. Если кто-то в этом кружке узнает новость, он сообщает ее всем своим друзьям. Алиса узнала новость. Докажите, что через некоторое время ее будет знать весь кружок.

II Европейский математический турнир
г. Минск, 1–7 марта 2019 года

The International league. Матбой № 4. Ecuador vs Tajikistan (j)

6 марта

1. Трехзначное число начинается с цифры 5. Эту цифру переставили на последнее место. В результате число уменьшилось на 360. Найдите исходное число.

2. Расставьте скобки в левой части равенства $1 : 2 : 3 : 4 : 6 = 1$ так, чтобы оно стало верным. (Порядок чисел менять нельзя.)

3. За круглым столом сидит 20 детей. Может ли ровно половина из них сидеть между мальчиком и девочкой?

4. Разрежьте квадрат 5×5 по границам клеток на 3 части так, чтобы их периметры были одинаковы, а площади отличались не более чем на одну клетку.

5. Алекс пишет подряд без пробелов натуральные числа $123456789101112\ldots$ Определите номера позиций, на которых впервые встретятся подряд три цифры 5.

6. В таблицу 3×3 вписаны цифры от 1 до 9 без повторов. Сумма в верхней строке вчетверо больше чем в нижней, а в правом столбце — в полтора раза больше, чем в левом. Какая цифра может стоять в центре таблицы?

7. Алиса и Боб написали по числу. Влад разделил число Алисы на число Боба и записал результат. Оказалось, что число Алисы в 7 раз больше чем у Боба, а число Боба в 5 раз больше, чем результат Влада. Найдите число Алисы.

8. Три баскетболиста перешли из одной команды в другую. Мог ли в результате увеличиться средний рост в обеих командах?