II Европейский математический турнир
г. Минск, 1–7 марта 2019 года

Senior Grand league. Математический бой № 2

4 марта

1. Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Докажите, что для всех натуральных n выполнено неравенство

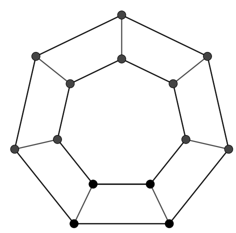
$$n + d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \leqslant d(n+1) + d(n+2) + \ldots + d(2n).$$

2. В квадрате $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = AB$ и $\angle CPD = 90°$. Докажите, что $DP = 2CP$.

3. Коля и Саша играют в игру на клетчатой доске 100×100. Коля начинает и своим ходом красит одну клетку в красный цвет, а Саша — в синий. Ходят по очереди, перекрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. В конце игры Коля ищет красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Саша платит ему столько рублей, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Коля, как бы ни играл Саша?

4. Кирилл разделил некоторое число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Назар разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.

5. Паук Андрей сплел паутинку, которую вы видите на картинке справа. В ее вершинах записаны натуральные числа, причем никакие два одинаковых числа не соединены ребром. На ребрах записали наибольшие общие делители чисел в вершинах. Может ли сумма всех чисел в вершинах оказаться равной сумме всех чисел на ребрах?



6. Паша не поленился и вычислил для каждого из чисел от 1 до 10 000 произведение всех ненулевых цифр, после чего Кеша сложил все полученные Пашей числа. Какой результат получил Кеша?

7. У 100 девочек было по 100 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце.

8. Алиса вставляет в многозначное число плюсы после каждой чётной цифры и вычисляет результат, а Боб — после нечётных цифр и вычисляет результат (например, для числа 2019 Алиса получит $2 + 0 + 19 = 21$, а Боб $201 + 9 = 210$). Докажите, что есть не менее 100 шестизначных чисел, для каждого из которых результаты Боба и Алисы одинаковы.

II Европейский математический турнир
г. Минск, 1–7 марта 2019 года

Junior Grand league. Математический бой № 2

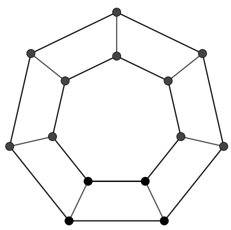
4 марта

1. У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце.

2. Алиса вставляет в многозначное число плюсы после каждой чётной цифры и вычисляет результат, а Боб - после нечётных цифр и вычисляет результат (например, для числа 2019 Алиса получит 2 +0+19=21, а Боб 201+9=210). Найдется ли какое-нибудь шестизначное число, у которого все цифры различны, а результаты Боба и Алисы одинаковы?

3. Несколько шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждую минуту все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 2019 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество шариков могло быть в круге?

4. Паук Андрей сплел паутинку, которую вы видите на картинке справа. В вершинах записаны натуральные числа, причем никакие два одинаковых числа не соединены ребром. На ребрах записали наибольшие общие делители чисел в концах. Может ли сумма всех чисел в вершинах равняться сумме всех чисел на ребрах?



5. Коля и Саша играют в игру на клетчатой доске 100×100. Коля начинает и своим ходом красит одну клетку в красный цвет, а Саша — в синий. Ходят по очереди, перекрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. В конце игры Коля ищет красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Саша платит ему столько рублей, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Коля, как бы ни играл Саша?

6. Паша не поленился и вычислил для каждого из чисел от 1 до 10 000 произведение всех ненулевых цифр, после чего Кеша сложил все полученные Пашей числа. Какой результат получил Кеша?

7. На плоскости проведено 40 прямых, некоторые красные, остальные синие. Никакие три прямые не проходят через одну точку. Известно, что точек, где пересекаются прямые одинакового цвета больше, чем точек, где пересекаются прямые разного цвета. Докажите, что красных и синих прямых не поровну.

8. У Коли был бумажный квадрат, длина стороны которого равна натуральному числу. Двумя прямолинейными разрезами Коля разделил его на четыре прямоугольника. Могут ли периметры этих прямоугольников равняться четырём последовательным натуральным числам?

II Европейский математический турнир
г. Минск, 1–7 марта 2019 года

International league. Математический бой № 2

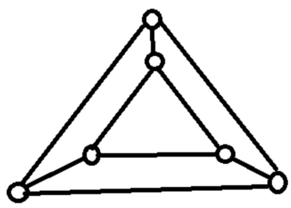
4 марта

1. На доске написаны 25 обыкновенных несократимых дробей. Все они не равны 0. Если перевернуть все дроби со знаменателями, кратными 3, то произведение всех 25 дробей будет равно 8,1. А чему будет равно произведение всех 25 дробей, если вместо этого перевернуть все дроби со знаменателями не кратными 3?

2. Алиса вставляет в многозначное число плюсы после каждой чётной цифры и вычисляет результат, а Боб — после нечётных цифр и вычисляет результат (например, для числа 2019 Алиса получит $2 + 0 + 19 = 21$, а Боб $201 + 9 = 210$). Найдутся ли 10 шестизначных чисел, у каждого из которых все цифры различны, а результаты Боба и Алисы одинаковы?

3. На плоскости проведено 20 прямых, некоторые красные, остальные синие. Никакие три прямые не проходят через одну точку. Известно, что точек, где пересекаются прямые одинакового цвета больше, чем точек, где пересекаются прямые разного цвета. Докажите, что красных и синих прямых не поровну.

4. В кружках расставлены 6 различных натуральных чисел, а на отрезках стоит наибольший общий делитель чисел в его концах. Может ли сумма чисел в кружках быть равной сумме чисел на отрезках?



5. Можно ли в таблицу 3×3 вписать цифры от 1 до 9 без повторов так, чтобы сумма в верхней строке была втрое больше суммы в нижней, а сумма в правом столбце — вдвое больше, чем в левом?

6. В шахматном турнире играют 10 девочек и 20 мальчиков. В каждом туре все разбиваются на пары противников. В первых трех турах 11 раз девочка играла против девочки. Сколько раз в этих турах мальчик играл против мальчика?

7. В каждой клетке квадрата 8×8 стоит по человеку: либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Соседями считаются те, кто стоит в клетках с общей стороной. Каждый человек сказал фразу "Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей". Каково наибольшее возможное число рыцарей?

8. Имеются пластмассовые прямоугольники и треугольники, всего 77 штук (возможно, все 77 одинакового вида). Можно один раз разрезать по прямой один многоугольник на две части, и затем нужно разложить все многоугольники в три коробки. Докажите, что это можно сделать так, чтобы в каждой коробке общее число углов получилось одно и то же (у треугольника три угла, у прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т. д.).