I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Командная олимпиада

28 февраля

1. Пусть $x > y$ — положительные числа. Может ли на числовой прямой число 2 стоять ровно посередине между дробями $\dfrac{x+y}{x}$ и $\dfrac{x+y}{y}$?

2. Разрежьте треугольник с углами $30°$, $40°$ и $110°$ на три равнобедренных треугольника.

3. Три наименьших делителя натурального числа n — это $1 < k < m$. Известно, что $n = (3k+m)^2$. Найдите все такие n.

4. Из клетчатого листа бумаги, раскрашенного в шахматном порядке, Петя вырезал по клеточкам полоску 1×12 и приклеил ее на холодильник. Он расставляет на ней 12 одинаковых по форме магнитных фишек семи цветов радуги: одну красную, одну фиолетовую и по две оранжевых, желтых, зеленых, голубых и синих. Петя называет расстановку *хорошей*, если выполнены два правила:

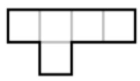
Ф: Фиолетовая фишка стоит между синими (не обязательно рядом).

Ж: Желтые фишки стоят на клетках разного цвета.

Сколько всего существует хороших расстановок?

5. Четыре точки A, B, C, D таковы, что D и C лежат по одну сторону относительно прямой AB и выполнено равенство $AB = AD + BC$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке E. Докажите, что $CE = DE$.

6. Какое наименьшее число клеток можно отметить на клетчатой доске 18×18 так, чтобы фигуркой на рисунке нельзя было накрыть 5 неотмеченных клеток? Фигурку можно поворачивать и переворачивать.



7. Назовем натуральное число *удачным*, если его можно представить как сумму натуральных чисел, у которых сумма обратных величин равна 1 (например, число 29 удачно: $29 = 2+3+12+12$ и $1/2+1/3+1/12+1/12 = 1$). Докажите, что все числа вида $24n^2$ удачные.

8. На плоскости нарисовано 100 единичных отрезков, каждые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки можно накрыть каким-нибудь треугольником периметра меньше 14.